

## 2 光子上方変換のマルチモード理論

中谷正俊<sup>A</sup>、清水亮介<sup>B,C</sup>、越野和樹<sup>A,B</sup>  
東京医科歯科大学教養部<sup>A</sup>  
JST さきがけ<sup>B</sup>  
東北大学電気通信研究所<sup>C</sup>

### Multimode theory of up-conversion of two photons

M. Nakatani<sup>A</sup>, R. Shimizu<sup>B,C</sup> and K. Koshino<sup>A,B</sup>

*College of Liberal Arts and Sciences, Tokyo Medical and Dental University<sup>A</sup>*

*PRESTO, Japan Science and Technology Agency<sup>B</sup>*

*Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University<sup>C</sup>*

The up-conversion dynamics of two photons occurring at a three-level atom is investigated theoretically. The analysis is based on a rigorous formalism adopting the multimode nature of the photon field, which enables us quantitative handling of the spatial profile of the photon pulses. We have derived an analytic formula that connects the wavefunction of input two photons and that of the up-converted output photon, and from it the up-conversion efficiency and the output pulse profile are numerically calculated.

### 1. はじめに

非線形光学効果の代表的な例のひとつである2光子上方変換は、量子情報技術の分野において重要な応用を持つ。特に、近年この現象は通信路帯での高速・長距離の量子鍵配送を実現する上で、高効率な光子数計測の技術に使われるなど、その重要性が高まっている [1-4]。

2光子上方変換のダイナミクスは、単一モード近似にもとづいた現象論的な時間発展によって定性的に理解される [5]。しかし非線形光学効果は光子パルスの空間分布に強く依存するので、上方変換の確率も入射光子パルスの空間分布に影響を受けると考えられる。したがって、量子情報技術を実現する上で、光子の状態を精密に制御するには、単一モード近似による解析では不十分であり、光子パルスのマルチモードの性質を考慮した解析を行う必要がある。

本研究では、2光子上方変換のマルチモード理論を展開する。ここでは、[6-8] で用いられた方法により、上方変換された光子の波動関数の解析な表式を得る。光子パルスは多くの場合、光子数計測にもとづいた古典的な測度である強度分布によって特徴づけられる。しかし、強度分布だけでは光子

の量子状態は十分に特徴づけられるわけではない。そこで、古典的測定では区別がつかない、同じ光子パルス分布を持つ三つの入射光子状態を考え、上方変換のダイナミクスがこれら三つの状態によって全く異なることを示す。

### 2. 考えるモデルと解析

本研究で考える系は図1のように、一次元光子場と  $r = 0$  の位置にある3準位原子からなる。これは弱結合領域における共振器 QED 系を用いることで実現される [9]。2つの光子を  $r < 0$  の側から、初期時刻で基底状態にある原子へ入射する。原子の持つ3つのエネルギー準位を、図1に記したようにそれぞれ  $|g\rangle$ ,  $|m\rangle$ ,  $|e\rangle$  とする。また、 $|g\rangle$  から測った  $|m\rangle$  と  $|e\rangle$  のエネルギーをそれぞれ  $\Omega_m$ ,  $\Omega_e$  とし、 $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ ,  $|e\rangle \rightarrow |m\rangle$ ,  $|m\rangle \rightarrow |g\rangle$  遷移の緩和レートをそれぞれ  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  とすると、系全体のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \Omega_e \sigma_{ee} + \Omega_m \sigma_{mm} + \int dk k a_k^\dagger a_k \\ & + i \left[ \sqrt{\Gamma_1} \sigma_{eg} + \sqrt{\Gamma_2} \sigma_{em} + \sqrt{\Gamma_3} \sigma_{mg} \right] \tilde{a}_0 \\ & - i \tilde{a}_0^\dagger \left[ \sqrt{\Gamma_1} \sigma_{ge} + \sqrt{\Gamma_2} \sigma_{me} + \sqrt{\Gamma_3} \sigma_{gm} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

と与えられる。ここで、自然単位系 ( $\hbar = c = 1$ ) をとった。  $a_k$  は波数  $k$  の光子の消滅演算子を表し、原子の昇降演算子は  $\sigma_{eg} = |e\rangle\langle g|$  などと与えられる。また、実空間での光子の消滅演算子を  $a_k$  のフーリエ変換によって、  $\tilde{a}_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk a_k e^{ikr}$  と定義している。

入射 2 光子の状態ベクトルは、一般にマルチモードで次のような形で書ける。

$$|\psi_{\text{in}}^j\rangle = \iint dr_1 dr_2 \frac{f_j(r_1, r_2)}{\sqrt{2}} \tilde{a}_{r_1}^\dagger \tilde{a}_{r_2}^\dagger |0\rangle, \quad (2)$$

ここで、  $|0\rangle$  は原子の基底状態と光子場の真空状態の積で書かれる、系全体の基底状態を表す。また、  $f_j(r_1, r_2)$  は 2 光子の波動関数を表し、その指標  $j$  は入射光子の状態の違いを表す。この研究では、入射する 2 光子の状態として、図 2 のように 3 種類の状態  $j = a, b, c$  を考える。図 2(a) では 2 つの光子がそれぞれ異なるモード  $\xi_1, \xi_2$  を占め、図 2(b) では 2 つの光子が同じモードを占めている様子を表している。これらの状態をそれぞれ *spatially anticorrelated* 状態、 *spatially correlated* 状態と呼ぶことにする。入射光子が *anticorrelated* 状態 ( $j = a$ ) または *correlated* 状態 ( $j = b$ ) にあるときの 2 光子の波動関数  $f_a(r_1, r_2)$ ,  $f_b(r_1, r_2)$  は、単一光子のモード関数  $\xi_1(r)$ ,  $\xi_2(r)$  を用いて、

$$f_a(r_1, r_2) = \frac{\xi_1(r_1)\xi_2(r_2) + \xi_2(r_1)\xi_1(r_2)}{\sqrt{2 + 2|\mathcal{V}|^2}}, \quad (3)$$

$$f_b(r_1, r_2) = \frac{\xi_1(r_1)\xi_1(r_2) + \xi_2(r_1)\xi_2(r_2)}{\sqrt{2 + 2\text{Re}(\mathcal{V}^2)}}, \quad (4)$$

と表される。ここで、  $\mathcal{V}$  はモード  $\xi_1$  と  $\xi_2$  の重なりで、  $\mathcal{V} = \int dr \xi_1(r)\xi_2^*(r)$  と定義される。これら 2 光子波動関数は  $\int dr_1 dr_2 |f_j(r_1, r_2)|^2 = 1$  と規格化される、また  $f_j(r_1, r_2) = f_j(r_2, r_1)$  と対称化されていることに注意。これら 2 光子のパルスは強度分布  $I_{\text{in}}^j(r) = \langle \psi_{\text{in}}^j | \tilde{a}_r^\dagger \tilde{a}_r | \psi_{\text{in}}^j \rangle$  によって特徴づけられる。 *anticorrelated* 状態 ( $j = a$ ) と *correlated* 状態 ( $j = b$ ) に対しては、重なり  $\mathcal{V}$  が実となる場合、  $I_{\text{in}}^a(r) = I_{\text{in}}^b(r)$  となり、光子数計測にもとづく古典的な測定ではこれら二つの状態は区別がつかなくなる。

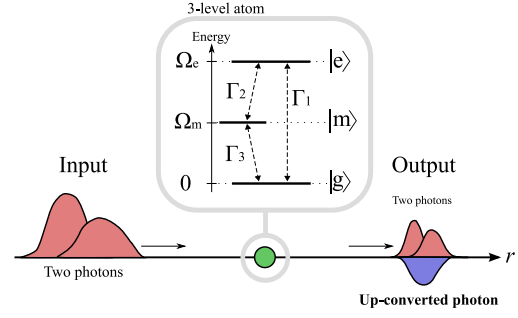


図 1 考える系の概略図。2 光子が  $r < 0$  の領域から、  $r = 0$  に位置する 3 準位原子へ入射される。相互作用の後、ある確率で上方変換された光子が  $r > 0$  の領域に放射される。

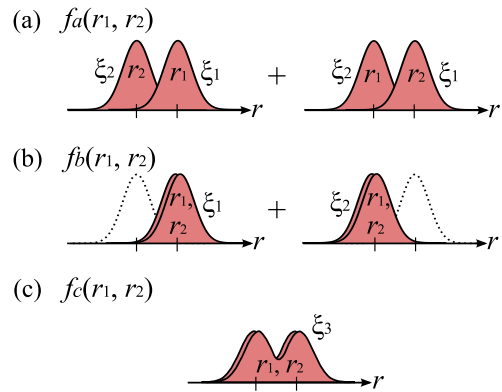


図 2 考える入射 2 光子状態。(a) anticorrelated 状態、(b) correlated 状態、(c) uncorrelated 状態。これら三つの状態は、モード  $\xi_1$  と  $\xi_2$  の重なり  $\mathcal{V}$  が実の時、同じ強度分布を持ち、古典的な測定では区別がつかない。

上述の二つの状態に加え、 *anticorrelated* 状態と同じ強度分布を持つような状態、 *uncorrelated* 状態を考える。  $|\xi_3(r)|^2 = I_{\text{in}}^a(r)/2$  という関係をみたす単一モード関数  $\xi_3(r)$  を導入すると、 *uncorrelated* 状態 ( $j = c$ ) は図 2(c) のように、2 光子がモード  $\xi_3$  を占めた状態  $f_c(r_1, r_2) = \xi_3(r_1)\xi_3(r_2)$  として定義できる。

出力される光子の状態ベクトルは、Schrödinger 方程式  $|\psi_{\text{out}}^j\rangle = e^{-i\mathcal{H}t} |\psi_{\text{in}}^j\rangle$  を解くことによって求まる。ここで、終時刻  $t$  は原子が完全に緩和し基底状態に戻るだけ十分大きな時間である。出力状態  $|\psi_{\text{out}}^j\rangle$  は、ある確率で  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  遷移により上方変換された光子を含む。したがって、出力状態の 1 光子成分と 2 光子成分の波動関数をそれ

ぞれ  $h_j$  と  $g_j$  とすると以下のように書ける

$$|\psi_{\text{out}}^j\rangle = \iint dr_1 dr_2 \frac{g_j(r_1, r_2; t)}{\sqrt{2}} \tilde{a}_{r_1}^\dagger \tilde{a}_{r_2}^\dagger |0\rangle + \int dr h_j(r; t) \tilde{a}_r^\dagger |0\rangle. \quad (5)$$

上方変換の確率  $P_j^{(1)}$  は  $h_j$  のノルム  $P_j^{(1)} = \int dr |h_j(r; t)|^2$  によって与えられる。これはその定義から終時刻  $t$  に依存するが、十分大きな  $t$  に対して  $t$  依存性がなくなる。上方変換が生じない確率  $P_j^{(2)}$  は  $g_j$  のノルム  $P_j^{(2)} = \iint dr_1 dr_2 |g_j(r_1, r_2; t)|^2 = 1 - P_j^{(1)}$  によって与えられる。

Schödinger 方程式  $|\psi_{\text{out}}^j\rangle = e^{-i\mathcal{H}t} |\psi_{\text{in}}^j\rangle$  は、[6-8] で展開された方法を用いることで解析的に解くことができ、上方変換された光子の波動関数  $h_j(r; t)$  は入射光子の波動関数  $f_j(r_1, r_2)$  の関数として次のように求まる。

$$h_j(r; t) = -\sqrt{2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3} e^{-i(\Omega_e + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2})(t-r)} \times \int_0^{t-r} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 e^{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{2}\tau_1} \times e^{i(\Omega_m + \frac{\Gamma_3}{2})(\tau_1 + \tau_2)} f_j(-\tau_1, -\tau_2). \quad (6)$$

### 3. 数値計算による結果と考察

次の仮定のもとで数値解析を行う。(i) 原子のエネルギーを  $\Omega_m = \Omega_e/2 (= \Omega)$  とする。(ii) 原子の緩和レートを  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 (= \Gamma)$  とする。(iii) 入射 2 光子は  $|g\rangle \rightarrow |m\rangle$  と  $|m\rangle \rightarrow |e\rangle$  遷移に共鳴するとする。さらに入射光子の単一モード関数  $\xi_1, \xi_2$  として、

$$\xi_1(r) = \left(\frac{2}{\pi l^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\left(\frac{r-a+d/2}{l}\right)^2 + i\Omega r\right], \quad (7)$$

$$\xi_2(r) = \left(\frac{2}{\pi l^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\left(\frac{r-a-d/2}{l}\right)^2 + i\Omega r\right], \quad (8)$$

ととる。ここで、 $l$  はコヒーレンス長、 $d$  は  $\xi_1$  と  $\xi_2$  の間隔を表す。また、 $a (< 0)$  は 2 光子の入射前の初期位置を表し、 $|a| \gg l, d$  とする。これらの  $\xi_1, \xi_2$  に対し重なり  $\mathcal{V}$  は、 $\mathcal{V} = \exp(-d^2/2l^2)$  となる。モード関数  $\xi_3(r)$  は、 $\xi_3(r) = \sqrt{I_{\text{in}}^a(r)/2} \exp(i\Omega r)$  によって与えられ、式 (3),(7),(8) から決定される。これ

はちょうどモード  $\xi_1$  と  $\xi_2$  を結合したような形をしている。いま、重なり  $\mathcal{V}$  は実となるため三つの状態 ( $f_a, f_b, f_c$ ) は全て同じ強度分布を持つ  $I_{\text{in}}^a(r) = I_{\text{in}}^b(r) = I_{\text{in}}^c(r)$ 。したがって、これらの入力状態は古典的な測定ではまったく区別がつかない。

以上の条件のもと、式 (6) より上方変換の確率  $P_j^{(1)}$  の計算ができる。図 3 は、 $d$  を  $d = 0$  に固定したときの上方変換の確率  $P_j^{(1)}$  の  $l$  依存性を示す。モード間距離  $d = 0$  の場合、三つの入射光状態  $f_a, f_b, f_c$  はすべて同じ状態を表すことに注意。図 3 から、上方変換が生じるのに最適なコヒーレンス長 ( $l \simeq 3L^{-1}$ ) が存在することがわかる。このことは、 $l \rightarrow 0$  では入射光子のスペクトルが広がり原子と共鳴しなくなり、また  $l \rightarrow \infty$  では光子場の振幅が弱くなり  $|g\rangle \rightarrow |m\rangle$  遷移が起りにくくなるためと考えられる。

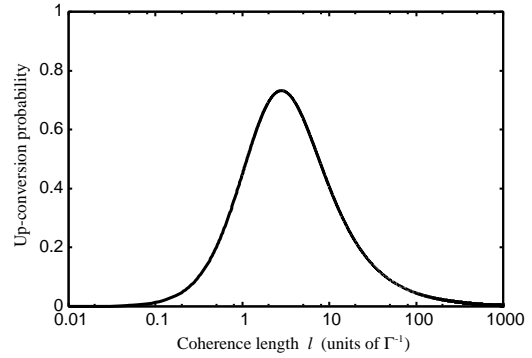


図 3: 上方変換確率  $P_j^{(1)}$  のコヒーレンス長  $l$  依存性。ここで、モード間隔は  $d = 0$  に固定している。上方変換確率  $P_j^{(1)}$  は  $l \simeq 3\Gamma^{-1}$  で極大となる。

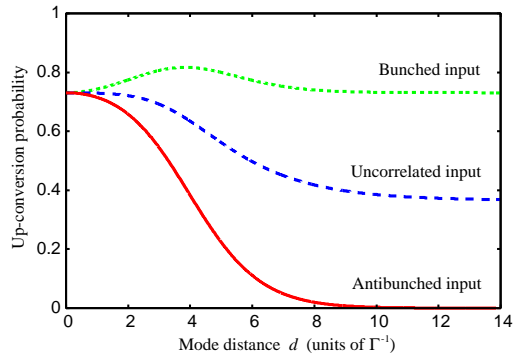


図 4: 上方変換確率  $P_j^{(1)}$  のモード間隔  $d$  依存性。コヒーレンス長は  $l = 3\Gamma^{-1}$  に固定。実線・点線・破線はそれぞれ、anticorrelated, correlated, uncorrelated 状態に対する結果を表す。

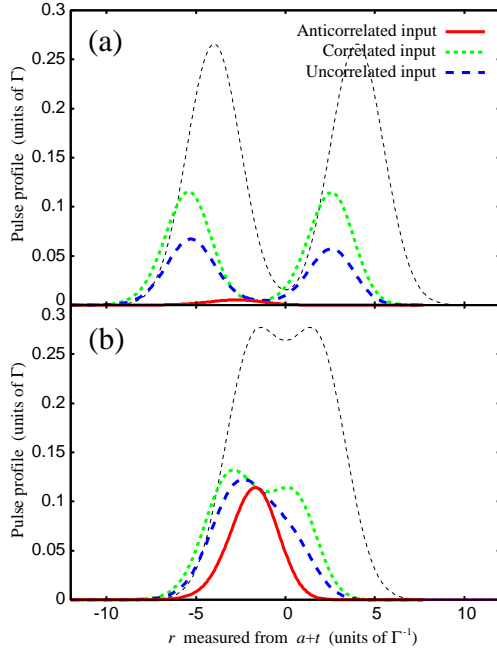


図 5: 上方変換された光子パルスの空間分布。実線・点線・破線はそれぞれ、anticorrelated, correlated, uncorrelated 状態に対する結果を表す。また比較対象として、入射光子のパルス分布（三つの状態で同じ）を細い破線で描いている。(a)では、 $l = 3\Gamma^{-1}$ ,  $d = 8\Gamma^{-1}$  ( $d \gg l$ )、また (b)では、 $l = 3\Gamma^{-1}$ ,  $d = 4\Gamma^{-1}$  ( $d \sim l$ ) としている。

次に確率  $P_j^{(1)}$  の  $d$  依存性を調べる。図 4 は  $l = 3\Gamma^{-1}$  に固定して、確率  $P_j^{(1)}$  を  $d$  の関数として、三つの入力状態 ( $f_a, f_b, f_c$ ) に対してプロットしたものである。モード間隔  $d = 0$  で同じだった三つの確率が、 $d$  が大きくなるにつれ違いが現れることが分かる。間隔  $d \rightarrow \infty$  で、 $P_a^{(1)}$  がゼロになり、 $P_b^{(1)}$  は値をほとんど変えない。また、 $P_c^{(1)}$  は  $P_a^{(1)}$  と  $P_b^{(1)}$  の中間の値を与える。これら結果は定性的には、二つの光子が同時に原子に入射されることが上方変換が生じる上で本質的であると理解される。また確率  $P_c^{(1)}$  のふるまいは、uncorrelated 状態が  $d \rightarrow \infty$  で anticorrelated 状態と correlated 状態の重ね合わせ  $f_c \simeq (f_a + f_b)/\sqrt{2}$  として書けることから理解できる。

図 5 は、 $h_j$  から得られる別の物理量、上方変換光子のパルスの空間分布  $I_j^{(1)}(r) = |h_j(r;t)|^2$  を表す。図 5(a) はモード  $\xi_1$  と  $\xi_2$  が十分に離れている場合 ( $d \ll l$ ) を、図 5(b) は二つのモード関数が近い場合 ( $d \sim l$ ) を表している。上方変換光子は、anticorrelated

状態に対してはモード  $\xi_1$  と  $\xi_2$  が重なっているところに、correlated 状態に対してはモード  $\xi_1, \xi_2$  の位置で生じている。図 5(a) では、uncorrelated 状態に対する結果は、correlated 状態に対する値の半分程度になっている。これは  $d \rightarrow \infty$  で、 $f_c \simeq (f_a + f_b)/\sqrt{2}$  となることによる。また、モード  $\xi_1$  と  $\xi_2$  が近づくにつれ ( $d \sim l$ )、三つの状態の違いが無くなる事が分かる。

#### 4. まとめ

2 光子上方変換のダイナミクスを、2 次の非線形媒質として 3 準位原子を仮定し、理論的に解析した。ここでは、原子と光子を全量子力学的に扱い、光子のマルチモードの性質を取れ入れた厳密な定式化のもと、上方変換された光子の波動関数の解析的な表式を得た。古典的な測定では区別がつかない三つの異なる入射光子状態 (anticorrelated, correlated, uncorrelated 状態) を考え、それらに対する上方変換の確率と上方変換光子のパルス分布を計算した。それにより、三つの状態が光子パルスの空間分布では区別がつかなくとも、その上方変換のダイナミクスは全く異なることを明らかにした。

#### 参考文献

- [1] A. P. VanDevender, *et al.*, J. Mod. Opt. **51**, 1433 (2004).
- [2] H. Takesue, *et al.*, New J. Phys. **7**, 232 (2005).
- [3] R. T. Thew, *et al.*, New J. Phys. **8**, 32 (2006).
- [4] H. Takesue, *et al.*, Nature Photonics **1**, 343 (2007).
- [5] F. Dell'Anno, *et al.*, Phys. Rep. **428**, 53 (2006).
- [6] K. Koshino, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 173601 (2004).
- [7] K. Koshino, *et al.*, Int. J. Mod. Phys. B **20**, 2451 (2006).
- [8] K. Koshino, Phys. Rev. Lett. **98**, 223902 (2007).
- [9] Q. A. Turchette, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4710 (1995).