外場駆動された双極子振動子からの動的カシミール光子放出

田中 智 [A]、神吉 一樹 [A]、山根 秀勝 [B]
阪府大院理 [A]、阪府大院工 [B]

Dynamical Casimir photon emission from a dipole oscillator driven by a time-dependent external field

Satoshi Tanaka[A], Kazuki Kanki[A], Hidemasa Yamane[B]
Department of Physical Science[A], *Department of Enginnering*[B]
Osaka Prefecture University

Dynamical Casimir photon emission process of a dipole oscillator driven by a time dependent external field is formulated in terms of the complex eigenvalue problem of Liouville operator. The dressed particle and dressed field modes as the eigenmodes of the total Liuvillian are obtained by the Bogoliubov transformation. We show the exact solution of the Heisenberg equation under the existence of the external force. Dynamical Casimir photon emission spectrum is evaluated by the multipoint correlation functions in terms of the complex spectral expansion of the Liouvillian. We have clarified the spontaneous emission of the virtual photon cloud surrounding the dipole oscillator in the quantum vacuum to a real photon by the external field.

1 はじめに

基底状態にある質量を無視できる中性物体を真空中で動かすと何が生じるか？真空中では仕事をしないので何も生じない、という答えは古典的には正しい。しかし、量子力学では電磁場の真空ゆらぎのため、真空中で物体が加速運動するだけで光子対の放射が観測される。これが 1970 年に Moore によって予言された動的カシミール効果である [1]。たとえ基底状態にある中性物体であっても、その周りには仮想光子対の生成消滅が絶えず繰り返されており、物体が加速度運動をすると、仮想光子は物体から引き離されて実光子へと転換し、無限遠方へ放射される。この動的カシミール効果は量子真空の直接観測であり、量子真空に対する外場印加によって生じるウンルー効果、ホーキング放射などと関連した興味深い現象である [2–4]。

動的カシミール効果の観測のためには物体を光速近くまで加速させる必要があるため、長い間実験的検証が困難と考えられてきた。しかしながら、2011 年に Wilson らは超伝導 SQUID をその端に有する光導波路において、導波路中電磁場に対する境界条件を瞬時に変えることにより、動的カシミール光子放出の観測に初めて成功した [5]。これ以降、微小半導体共振器や超伝導回路などを用いて放出光子の量子相関などを観測するための実験が行われている。

動的カシミール効果は、物質に局在した仮想光子が実光子となって自発放射される不可逆散逸過程である。したがって、放射光子の量子相関を正しく評価するためには、微視的力学原理に基づき不可逆過程を量子力学の枠組みの中で定式化しなければならない。われわれは、最近、時間に依存した外場中での２準位原子からの高次高調波発生に関して、微視的原理に基づきフロケー空間におけるフロケーハミルトニアンの複素固有値問題を解くことにより解析した [6]。しかしながら、動的カシミール効果の理論解析においては、特に実光子の放射過程に対して、現在までのところ、そのような原理的な立場からの定式化はない。本研究では、仮想光子から実光子の転換過程を厳密に論じるためのリウビリ演算子の複素固有値問題による理論的定式化を提案する。

2 モデル

本研究では、時間に依存した外場によって平衡点位置が駆動される双極子振動子と自由輻射場の相互作用系を考える。ミニマルカップリングハミルトニアンに対して双極子近似を行って得られる

$$\hat{H}(t) = \omega_0(\hat{a}^\dagger + \alpha^*(t))(\hat{a} + \alpha(t)) + \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + g\sum_k (\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{b}_k^\dagger + \hat{b}_k) \tag{1}$$

を考える [7,8]。双極子振動子の振動数を ω_0 とし、平衡位置が古典的な外力 $\alpha(t), (\alpha^*(t))$ によって変位する。振動子と自由輻射場との相互作用は定数を g

とし、仮想遷移相互作用により、基底状態において振動子の周りに仮想光子が局在する。この仮想光子が、外力の印加によって実光子へと転換し自発放射が生じる。

この系のハイゼンベルグ方程式は、全系の量子力学的正準変数 $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger\}$ をベクトル $|\hat{\Psi}(t)\rangle$ として書き表すと

$$-id_t|\hat{\Psi}(t)\rangle = \mathcal{L}_F(t)|\hat{\Psi}(t)\rangle = \mathcal{L}|\hat{\Psi}(t)\rangle + |u(t)\rangle \quad (2)$$

とかける。ここで、$\mathcal{L}_F(t)$ は、ハミルトニアンとの交換関係で定義されるリウビル演算子である。第1項は無摂動リウビリアンの寄与

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 0 & -g & -g & \cdots \\ 0 & \omega_0 & g & g & \cdots \\ -g & -g & -\omega_k & 0 & \cdots \\ g & g & 0 & \omega_k & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad (3)$$

で、第 2 項が振動子に働く外力の項 $|u(t)\rangle = (-\omega_0\alpha(t), \omega_0\alpha^*(t), 0, 0, \cdots)^t$ である。ここでは表現基底を $\{|a\rangle, |a^*\rangle, |b_k\rangle, |b_k^*\rangle\}$ として、場の演算子を

$$\begin{aligned} |\hat{\Psi}(t)\rangle &= \hat{a}(t)|a\rangle + \hat{a}^\dagger(t)|a^*\rangle \\ &\quad + \sum_k (\hat{b}_k(t)|b_k\rangle + \hat{b}_k^\dagger(t)|b_k^*\rangle) \end{aligned} \quad (4)$$

と表わしている。消滅演算子（正振動数成分）と生成演算子（負振動数成分）が仮想遷移相互作用によって結合するため基底状態は仮想光子雲をまとう。さらに、連続スペクトルを持つ自由輻射場との相互作用による共鳴特異性によって、系の固有モードは複素固有振動数を持つ。この複素固有モードが外力によって励起されると同時に光子を自発放射し decay する。これが動的カシミール効果として観測される実光子である。次節以下に示すように、本研究では、ハイゼンベルグ方程式の解析解を得た。これによって、放出光子の量子相関、振動子の励起状態と放出光子の相関、および、これらの外力による影響を正しく解析することができる。

3 リウビル演算子の複素固有値問題

この節ではまず、基底関数空間 $\{|a\rangle, |a^*\rangle, |b_k\rangle, |b_k^*\rangle\}$ 内で、無摂動リウビル演算子の右（左）複素固有値問題

$$\mathcal{L}|\phi_j\rangle = Z_j|\phi_j\rangle\,, \mathcal{L}|\phi_j^*\rangle = -Z_j|\phi_j^*\rangle\,, \quad (5a)$$

$$\langle\tilde{\phi}_j|\mathcal{L} = Z_j\langle\tilde{\phi}_j|\,, \langle\tilde{\phi}_j^*|\mathcal{L} = -Z_j\langle\tilde{\phi}_j^*|\,. \quad (5b)$$

を解く。この固有状態に相当する複素固有モードをボゴリュボフ変換の形で求められる [9–11]。

リウビル演算子 $\mathcal{L}$ は、無限次元の基底系で表現される無限次元行列なので、この固有値問題を解くために Brilluoin-Wigner-Feshbach の射影演算子法を用いる。例として、以下に離散的固有状態を求める。射影演算子として $\mathcal{P}_a \equiv |a\rangle\langle a| + |a^*\rangle\langle a^*|$ をとる。この補空間への射影は、$\mathcal{Q}_a \equiv \sum_k |b_k\rangle\langle b_k| + |b_k^*\rangle\langle b_k^*|$ である。この射影演算子を固有値問題 Eq.(5) に作用し、離散基底空間における有効リウビリアン

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff},a} = \begin{pmatrix} -\omega_0 - g^2\sigma(z) & -g^2\sigma(z) \\ g^2\sigma(z) & \omega_0 + g^2\sigma(z) \end{pmatrix} \quad (6)$$

を得る。ここで、自己エネルギー $\sigma(z)$ は、

$$\sigma(z) = \sum_k \frac{2\omega_k}{z^2 - \omega_k^2} \quad (7)$$

で与えられ、連続極限では波数 k が連続変数となりコーシー積分の形になることに注意する。固有値は分散方程式

$$z^2 - \omega_0^2 - 2\omega_0 g^2\sigma^2(z) = 0 \quad (8)$$

を解くことによって得られる。Eqs.(7) と (8) から分散方程式は、z と $-z$ を解に持つことが確かめられる。この時、消滅演算子の固有値の虚部を正に取る解析接続を行うことによって、外向きに放射する複素固有値を持つ共鳴状態を得る [10, 11]。

有効リウビリアンに対する固有値問題を解いて得られた固有関数に、さらに、連続状態の成分を加え合わせることで、輻射場まで含めた全系のリウビリアンに対する固有状態を得る。具体的には、右固有関数に対して

$$\begin{aligned} |\phi_a\rangle = \mathcal{N}_a^{1/2} \Bigg\{ & \frac{(Z_a + \omega_0)|a^*\rangle - (Z_a - \omega_0)|a\rangle}{2\omega_0} \\ & + g\sum_k \left(\frac{|b_k^*\rangle}{Z_a - \omega_k} + \frac{|b_k\rangle}{[z + \omega_k]^-_{z=Z_a}} \right) \Bigg\}\,, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} |\phi_a^*\rangle = \mathcal{N}_{a^*}^{1/2} \Bigg\{ & \frac{(-Z_a + \omega_0)|a^*\rangle - (-Z_a - \omega_0)|a\rangle}{2\omega_0} \\ & + g\sum_k \left(\frac{|b_k^*\rangle}{[z - \omega_k]^+_{z=-Z_a}} - \frac{|b_k\rangle}{-Z_a + \omega_k} \right) \Bigg\}\,. \end{aligned} \quad (9b)$$

連続状態 $\{|\phi_k\rangle, |\phi_k^*\rangle\}$ についても同様に得られる。これらに対する左固有関数 $\{\langle\tilde{\phi}_a|, \langle\tilde{\phi}_a^*|, \langle\tilde{\phi}_k|, \langle\tilde{\phi}_k^*|\}$ についても Eq.(5b) に対して射影演算子法を適用することで同様に得られる。規格化定数 $\mathcal{N}_a^{1/2}, \mathcal{N}_{a^*}^{1/2}$ は、それぞれに対する左固有関数との規格化条件から定められる。連続状態に対しても同様に求められ、右お

よび左固有関数は

$$\mathcal{L}|\phi_k\rangle = \omega_k|\phi_k\rangle \ , \ \mathcal{L}|\phi_k^*\rangle = -\omega_k|\phi_k^*\rangle \ , \tag{10a}$$
$$\langle\tilde{\phi}_k|\mathcal{L} = \omega_k\langle\tilde{\phi}_k| \ , \ \langle\tilde{\phi}_k^*|\mathcal{L} = -\omega_k\langle\tilde{\phi}_k^*| \tag{10b}$$

として求められる。

4 外力下での複素固有モードの時間変化とスペクトル

この節では、外力下でのハイゼンベルグ方程式 Eq.(2) の解を、前節で得た固有関数での展開形として表し、多点相関関数と関係したスペクトルの解析的な表現を導く。場の演算子は、右固有関数の展開によって

$$|\hat{\Psi}(t)\rangle = \hat{A}(t)e^{iZ_at}|\phi_a\rangle + \hat{A}^\dagger(t)e^{-iZ_at}|\phi_a^*\rangle + \sum_k \left(\hat{B}_k(t)e^{i\omega_kt}|\phi_k\rangle + \hat{B}_k^\dagger(t)e^{-i\omega_kt}|\phi_k^*\rangle\right) \ . \tag{11}$$

として与えられる。これを Eq.(2) に代入すれば、場の演算子 $\{\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t), \hat{B}_k(t), \hat{B}_k^\dagger(t)\}$ について

$$\hat{A}(t) = \hat{A} + i\int_0^t d\tau e^{-iZ_a t}\langle\tilde{\phi}_a|u(\tau)\rangle \ , \tag{12a}$$
$$\hat{A}^\dagger(t) = \hat{A}^\dagger + i\int_0^t d\tau e^{iZ_a t}\langle\tilde{\phi}_a^*|u(\tau)\rangle \ , \tag{12b}$$
$$\hat{B}_k(t) = \hat{B}_k + i\int_0^t d\tau e^{-i\omega_k t}\langle\tilde{\phi}_k|u(\tau)\rangle \ , \tag{12c}$$
$$\hat{B}_k^\dagger(t) = \hat{B}_k^\dagger + i\int_0^t d\tau e^{i\omega_k t}\langle\tilde{\phi}_k^*|u(\tau)\rangle \ , \tag{12d}$$

を得る。ここで、$\hat{A} \equiv \hat{A}(0), \hat{A}^\dagger \equiv \hat{A}^\dagger(0), \hat{B}_k \equiv \hat{B}_k(0), \hat{B}_k^\dagger \equiv \hat{B}_k^\dagger(0)$ とした。場の演算子の表現 (4) と (11) との比較、および、$\mathcal{L}$ の固有関数の双規格直交性から場の演算子をボゴリュボフ変換の形式で求めることができる：

$$\hat{A}(t)e^{-iZ_at} = \hat{a}(t)\langle\tilde{\phi}_a|a\rangle + \hat{a}^\dagger(t)\langle\tilde{\phi}_a|a^*\rangle + \sum_k\left(\hat{b}_k(t)\langle\tilde{\phi}_a|b_k\rangle + \hat{b}_k^\dagger(t)\langle\tilde{\phi}_a|b_k^*\rangle\right) \ , \tag{13a}$$
$$\hat{A}^\dagger(t)e^{iZ_at} = \hat{a}(t)\langle\tilde{\phi}_a^*|a\rangle + \hat{a}^\dagger(t)\langle\tilde{\phi}_a^*|a^*\rangle + \sum_k\left(\hat{b}_k(t)\langle\tilde{\phi}_a^*|b_k\rangle + \hat{b}_k^\dagger(t)\langle\tilde{\phi}_a^*|b_k^*\rangle\right) \ , \tag{13b}$$
$$\hat{B}_k(t)e^{-i\omega_kt} = \hat{a}(t)\langle\tilde{\phi}_k|a\rangle + \hat{a}^\dagger(t)\langle\tilde{\phi}_k|a^*\rangle + \sum_{k'}\left(\hat{b}_{k'}(t)\langle\tilde{\phi}_k|b_{k'}\rangle + \hat{b}_{k'}^\dagger(t)\langle\tilde{\phi}_k|b_{k'}^*\rangle\right) \ , \tag{13c}$$
$$\hat{B}_k^\dagger(t)e^{i\omega_kt} = \hat{a}(t)\langle\tilde{\phi}_k^*|a\rangle + \hat{a}^\dagger(t)\langle\tilde{\phi}_k^*|a^*\rangle + \sum_{k'}\left(\hat{b}_{k'}(t)\langle\tilde{\phi}_k^*|b_{k'}\rangle + \hat{b}_{k'}^\dagger(t)\langle\tilde{\phi}_k^*|b_{k'}^*\rangle\right) \ , \tag{13d}$$

振動子と輻射場が結合した形での基底状態 $|G\rangle$ は、

$$\hat{A}|G\rangle = 0 \ , \hat{B}_k|G\rangle = 0 \ \ \text{for} \ \forall k \ , \tag{14}$$

で定義される。

全系の全ての固有モードに対する時間発展が求められたので、任意の物理量の多時間多点相関関数を求めることができる。特に、全系の基底状態において、仮想光子が物体に局在している状態を始状態としてスペクトルを計算するとき、上記の性質 Eq.(14) があるために新しい固有モードを用いるのが便利である。

ここでは、全系の基底状態における振動子の１粒子励起スペクトル

$$S_a(t,\tau) \equiv \langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t-\tau)\rangle_G \ . \tag{15}$$

と輻射場の１光子スペクトル

$$S_k(t,\tau) \equiv \langle\hat{b}_k^\dagger(t)\hat{b}_k(t-\tau)\rangle_G \ . \tag{16}$$

とを求めてみる。

スペクトルを求めるために、Eq.(13) を用いて、無摂動系に対する生成・消滅演算子を新しい固有モードで書き換えると

$$\hat{a}(t) = \hat{A}(t)e^{iZ_at}\langle a|\phi_a\rangle + \hat{A}^\dagger(t)e^{-iZ_at}\langle a|\phi_a^*\rangle + \sum_k\left(\hat{B}_k(t)e^{i\omega_kt}\langle a|\phi_k\rangle + \hat{B}_k^\dagger(t)e^{-i\omega_kt}\langle a|\phi_k^*\rangle\right) \ , \tag{17a}$$
$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{A}(t)e^{iZ_at}\langle a^*|\phi_a\rangle + \hat{A}^\dagger(t)e^{-iZ_at}\langle a^*|\phi_a^*\rangle + \sum_k\left(\hat{B}_k(t)e^{i\omega_kt}\langle a^*|\phi_k\rangle + \hat{B}_k^\dagger(t)e^{-i\omega_kt}\langle a^*|\phi_k^*\rangle\right) \ , \tag{17b}$$
$$\hat{b}_k(t) = \hat{A}(t)e^{iZ_at}\langle b_k|\phi_a\rangle + \hat{A}^\dagger(t)e^{-iZ_at}\langle b_k|\phi_a^*\rangle + \sum_k\left(\hat{B}_k(t)e^{i\omega_kt}\langle b_k|\phi_k\rangle + \hat{B}_k^\dagger(t)e^{-i\omega_kt}\langle b_k|\phi_k^*\rangle\right) \ , \tag{17c}$$
$$\hat{b}_k^\dagger(t) = \hat{A}(t)e^{iZ_at}\langle b_k^*|\phi_a\rangle + \hat{A}^\dagger(t)e^{-iZ_at}\langle b_k^*|\phi_a^*\rangle + \sum_k\left(\hat{B}_k(t)e^{i\omega_kt}\langle b_k^*|\phi_k\rangle + \hat{B}_k^\dagger(t)e^{-i\omega_kt}\langle b_k^*|\phi_k^*\rangle\right) \ , \tag{17d}$$

となる。これから、

$$\hat{a}(t)|G\rangle = \left(i\int_0^t d\tau\langle a|e^{i\mathcal{L}\tau}|u(t-\tau)\rangle\right)|G\rangle + \hat{A}^\dagger|G\rangle e^{-iZ_at}\langle a|\phi_a^*\rangle + \sum_k \hat{B}_k^\dagger|G\rangle e^{-i\omega_kt}\langle a|\phi_k^*\rangle \tag{18}$$

を得る。第１項は、外場による真の基底状態の変調、第２項、第３項はそれぞれ、基底状態からの dressed particle および dressed field の１粒子生成を表す。1

粒子励起スペクトルは

$$
\begin{aligned}
&S_a(t,\tau)\\
&= -\int_0^t d\tau' \int_0^{t-\tau} d\tau'' \langle a^*|e^{i\mathcal{L}_0\tau'}|u(t-\tau')\rangle\\
&\quad \times \langle a|e^{i\mathcal{L}\tau''}|u(t-\tau-\tau'')\rangle\\
&+ e^{iZ_a t}\langle a^*|\phi_a\rangle\langle a|\phi_a^*\rangle + \sum_k e^{i\omega_k\tau}\langle a^*|\phi_k\rangle\langle a|\phi_k^*\rangle
\end{aligned}
\tag{19}
$$

１光子放出スペクトルについても同様にして

$$
\begin{aligned}
&S_k(t,\tau)\\
&= -\int_0^t d\tau' \int_0^{t-\tau} d\tau'' \langle b_k^*|e^{i\mathcal{L}_0\tau'}|u(t-\tau')\rangle\\
&\quad \times \langle b_k|e^{i\mathcal{L}\tau''}|u(t-\tau-\tau'')\rangle\\
&+ e^{iZ_a t}\langle b_k^*|\phi_a\rangle\langle b_k|\phi_a^*\rangle + \sum_{k'} e^{i\omega_{k'}\tau}\langle b_k^*|\phi_{k'}\rangle\langle b_k|\phi_{k'}^*\rangle
\end{aligned}
\tag{20}
$$

と得られる。振動子と輻射場に対する相関関数が同型の形をしていることに注意する。これは、本研究での取り扱いが、振動子と輻射場に対してコンシステントに扱っていることの帰結である。このようにして、両者の運動の相関を調べていくことができる。

5　おわりに

本研究では、平衡点が時間的に移動する調和振動子からの動的カシミール光放射について、微視的原理に基づき厳密に解析する理論を構築した。ここでは、リウビル演算子に関する複素固有値問題を解くことにより、全系の固有状態に対する複素固有モードを求めた。場の演算子をこの固有モードの展開として記述することにより、多粒子系の多点多時間相関関数を求めることができることを示した。カシミール効果によって放出された光子間の量子相関、振動子との相関など具体的な計算結果を示す予定である。

Acknowledgements

本研究に関して有用な示唆を与えていただいたトミオ・ペトロスキー博士に感謝する。また、有益な議論をしていただいた野場賢一博士、サバンナ・ガーモン博士、萱沼洋輔博士、溝口幸司博士に感謝する。特に、動的カシミール効果に関する直接的な動機を与えていただいたロベルト・パサンテ博士に感謝する。また、本研究は、光渦発生の機構解明に関する理論研究の中から生まれた成果であり、この分野への助言を与えていただいた加藤政博博士に感謝する。

参考文献

[1] G. T. Moore, Journal of Mathematical Physics **11**, 2679 (1970).

[2] P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe, and F. Nori, Rev. Mod. Phys. **84**, 1 (2012).

[3] V. V. Dodonov, Physica Scripta **82**, 038105 (2010).

[4] V. Macrì *et al.*, Phys. Rev. X **8**, 011031 (2018).

[5] C. Wilson *et al.*, Nature **479**, 376 (2011).

[6] H. Yamane and S. Tanaka, Symmetry **10**, 313 (2018).

[7] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics* (Wiley, 1989).

[8] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics* (Academic Press, New York, 1994).

[9] T. Petrosky, G. Ordonez, and I. Prigogine, Phys. Rev. A **64**, 062101/1 (2001).

[10] I. Antoniou, M. Gadella, E. Karpov, I. Prigogine, and G. Pronko, Chaos, Solitons and Fractals **12**, 2757 (2001).

[11] B. Tay and G. Ordóñez, Physica A**389**, 1346 (2010).