

# 動のカシミール効果による光子の生成と放射の理論

神吉一樹、田中智

大阪公立大学大学院理学研究科物理学専攻、南部陽一郎物理学研究所

## Theory of photon creation and emission in the dynamical Casimir effect

Kazuki Kanki and Satoshi Tanaka

Department of Physics and NITEP, Osaka Metropolitan University

The dynamical Casimir effect is a conversion of virtual photons into directly observable real photons by parametric amplification of vacuum fluctuations. We solve the Heisenberg equation for the creation and annihilation operators of the whole system in which a parametric oscillator is coupled to an external continuous field. Due to the effect of dissipation, the parametric bifurcation of the complex eigenfrequencies of the whole system occurs in the second Riemann sheet. When the effect of parametric amplification exceeds the effect of dissipation and some complex frequencies are in the first Riemann sheet, the photon number of every mode increases exponentially. In situations where parametric amplification is suppressed by the effect of dissipation, the photon number of the parametric oscillator is kept constant and stationary photon emission occurs, in which the number of emitted photons increases linearly with time.

### 1. はじめに

真空には場の量子ゆらぎが存在し、仮想粒子が生成・消滅をくりかえしている。真空に動的な摂動を加えることにより電磁場の量子ゆらぎを増幅し、仮想光子の実光子への転換を起こすのが動のカシミール効果である [1]。電磁場の境界 (鏡) を変動させて実光子を生み出すためには、光速に近い速度が必要であるため実現が困難であった。ところが、近年では超伝導回路を用いて電磁場の実効的な境界を高速で変動させることなどにより、動のカシミール効果により放射される光子を観測できるようになってきた [2, 3, 4]。

本論文では動のカシミール効果を電磁場の量子ゆらぎのパラメトリック増幅ととらえ、固有振動数が外場駆動により周期的な変調をうけるパラメトリック振動子を考える。そして、光子の生成から放射までを統一的に記述するために、パラメトリック振動子が連続モードと結合したモデルを取り扱う。

### 2. モデル

次のハミルトニアンで表されるパラメトリック振動子が連続場と結合した系を考える [5, 6, 7]。( $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = & \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{f_0}{2} (e^{i\Omega t} \hat{a}^2 + e^{-i\Omega t} \hat{a}^{\dagger 2}) \\ & + \int \omega \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega d\omega \\ & + \int g(\omega) (\hat{a}^\dagger \hat{b}_\omega + \hat{b}_\omega^\dagger \hat{a}) d\omega \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\hat{a}^\dagger$  ( $\hat{a}$ ) はパラメトリック振動子の生成 (消滅) 演算子、 $\hat{b}_\omega^\dagger$  ( $\hat{b}_\omega$ ) は振動数  $\omega$  の連続モードの生成

(消滅) 演算子であり、次の交換関係を満たす。

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2)$$

$$[\hat{b}_\omega, \hat{b}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega') \quad (3)$$

ハミルトニアン (1) は、振動子の固有振動数  $\omega_0$  が振動数  $\Omega \simeq 2\omega_0$  の変調を受ける場合に、速く振動する項を落とす近似 (回転波近似) を施した結果得られる。状態ベクトルにユニタリー演算子

$$\hat{U}(t) = \exp \left[ i \frac{\Omega}{2} t \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \int d\omega \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega \right) \right] \quad (4)$$

により回転変換を施すと、変換された状態の時間発展を生成するハミルトニアンは、次のように時間に依存しない。

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \Delta_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{f_0}{2} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2}) + \int \Delta \hat{b}_\Delta^\dagger \hat{b}_\Delta d\Delta \\ & + \int g(\Delta) (\hat{a}^\dagger \hat{b}_\Delta + \hat{b}_\Delta^\dagger \hat{a}) d\Delta \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$\Delta_0 = \omega_0 - \frac{\Omega}{2}, \quad \Delta = \omega - \frac{\Omega}{2} \quad (6)$$

は、パラメトリック共鳴振動数  $\Omega/2$  からのずれ (離調, detuning) である。

本論文で示す具体的な計算結果においては、連続モードとしてフォトニック結晶を想定して、1次元タイト・バインディング模型を用いた。すなわち、連続モードの振動数は波数  $k$  の関数として、次のように与えられるとした。(格子定数を 1 とする。)

$$\omega_k = \omega_B - B \cos k \quad (0 < k < \pi) \quad (7)$$

このとき、

$$g(\Delta) = \frac{g_0}{B} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{B^2 - (\Delta - \Delta_B)^2} \theta(B - |\Delta - \Delta_B|) \quad (8)$$

である。

### 3. ハイゼンベルク方程式の解と光子数の期待値

時間に依存しないハミルトニアン (5) による、ハイゼンベルク描像での生成・消滅演算子の時間発展を考える。ハミルトニアンは生成・消滅演算子の2次形式で与えられているので、ハイゼンベルクの運動方程式は線形方程式であり、ラプラス変換により解が得られる。

ハイゼンベルク描像の消滅演算子  $\hat{a}(t)$  のラプラス変換  $\tilde{a}(z)$  を

$$\tilde{a}(z) = -i \int_0^{\infty} e^{izt} \hat{a}(t) dt \quad (9)$$

で定義する。このとき逆変換は次式で与えられる。

$$\hat{a}(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} e^{-izt} \tilde{a}(z) dz \quad (10)$$

ここで、複素平面の中の実軸に平行な積分路  $-\infty + \eta \rightarrow +\infty + \eta$  は、ラプラス変換 (9) が定義される領域の中にあるように、 $\eta (> 0)$  を十分大きく取る必要がある。生成演算子  $\hat{a}^\dagger(t)$  のラプラス変換  $\tilde{a}^\dagger(z)$  は、 $\tilde{a}(z)$  と次の関係にある。

$$\tilde{a}^\dagger(z) = -[\tilde{a}(-z^*)]^\dagger \quad (11)$$

ハミルトニアン (5) に含まれる生成・消滅演算子のハイゼンベルクの運動方程式は

$$i\dot{\hat{a}}(t) = \Delta_0 \hat{a}(t) + f_0 \hat{a}^\dagger(t) + \int d\Delta g(\Delta) \hat{b}_\Delta(t) \quad (12)$$

$$i\dot{\hat{b}}_\Delta(t) = \Delta \hat{b}_\Delta(t) + g(\Delta) \hat{a}(t) \quad (13)$$

およびこれらのエルミート共役である。ハイゼンベルク方程式のラプラス変換は代数的に解くことができ、解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{a}(z) = G(z) [z + \Delta_0 + \Sigma(-z)] & \left[ \hat{a} + \int d\Delta \frac{g(\Delta)}{z - \Delta} \hat{b}_\Delta \right] \\ & + G(z) f_0 \left[ \hat{a}^\dagger - \int d\Delta \frac{g(\Delta)}{z + \Delta} \hat{b}_\Delta^\dagger \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}^\dagger(z) = G(z) [z - \Delta_0 - \Sigma(z)] & \left[ \hat{a}^\dagger - \int d\Delta \frac{g(\Delta)}{z + \Delta} \hat{b}_\Delta^\dagger \right] \\ & - G(z) f_0 \left[ \hat{a} + \int d\Delta \frac{g(\Delta)}{z - \Delta} \hat{b}_\Delta \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{b}_\Delta(z) = \frac{1}{z - \Delta} [g(\Delta) \tilde{a}(z) + \hat{b}_\Delta] \quad (16)$$

$$\tilde{b}_\Delta^\dagger(z) = \frac{1}{z + \Delta} [-g(\Delta) \tilde{a}^\dagger(z) + \hat{b}_\Delta^\dagger] \quad (17)$$

ここで、グリーン関数  $G(z)$  と自己エネルギー  $\Sigma(z)$  を次のように定義した。

$$[G(z)]^{-1} = [z - \Delta_0 - \Sigma(z)][z + \Delta_0 + \Sigma(-z)] + f_0^2 \quad (18)$$

$$\Sigma(z) = \int d\Delta \frac{g^2(\Delta)}{z - \Delta} \quad (19)$$

コーシー積分で与えられる自己エネルギー  $\Sigma(z)$  は、 $z$  の実軸上  $g(z = \Delta) \neq 0$  の領域で不連続であるが、解析接続により第2リーマン面へと連続的につながる。式 (8) を用いると、

$$\Sigma(z) = 2 \left( \frac{g_0}{B} \right)^2 \left[ z - \Delta_B - \sqrt{(z - \Delta_B)^2 - B^2} \right] \quad (20)$$

である。第1リーマン面の  $z$  に対して、 $|z - \Delta_B - \sqrt{(z - \Delta_B)^2 - B^2}| < B$  であるように、2価関数である平方根の値が定まる。

ラプラス逆変換によりハイゼンベルク演算子の時間発展が求まり、種々の物理量の期待値や相関関数を時間の関数として計算できる。本論文では、初期に真空状態 (光子数がゼロ)  $|0\rangle$  にあるときの、光子数の期待値の計算結果を示す。パラメトリック振動子の光子数の期待値は次式で与えられる。

$$\langle 0 | \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) | 0 \rangle = |\tilde{\alpha}(t)|^2 + \int d\Delta |\tilde{\beta}(\Delta; t)|^2 \quad (21)$$

$$\tilde{\alpha}(t) = f_0 \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} dz e^{-izt} G(z) \quad (22)$$

$$\tilde{\beta}(\Delta; t) = f_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} dz e^{-izt} G(z) \frac{g(\Delta)}{z + \Delta} \quad (23)$$

連続モードの光子数の期待値は次式で与えられる。

$$\langle 0 | \hat{b}_\Delta^\dagger(t) \hat{b}_\Delta(t) | 0 \rangle = |\tilde{A}(\Delta; t)|^2 + \int d\Delta' |\tilde{C}(\Delta, \Delta'; t)|^2 \quad (24)$$

$$\tilde{A}(\Delta; t) = f_0 \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} dz e^{-izt} G(z) \frac{g(\Delta)}{z - \Delta} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\Delta, \Delta'; t) \\ = f_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} dz e^{-izt} G(z) \frac{g(\Delta)}{z - \Delta} \frac{g(\Delta')}{z + \Delta'} \end{aligned} \quad (26)$$

初期時刻での全光子数をゼロとして、時刻  $t$  における系のエネルギー (ハミルトニアン (1) の期待値)

は次式のように全光子数の期待値に比例する。

$$\langle \psi(t) | \hat{H}(t) | \psi(t) \rangle = \frac{\Omega}{2} \langle \psi(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a} + \int d\omega \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega | \psi(t) \rangle \quad (27)$$

すなわち、振動数  $\Omega$  の振動数で駆動されているため、光子あたりのエネルギーは  $\Omega$  に等しい。

#### 4. 複素固有モードの振動数

本論文ではハイゼンベルク方程式の時間発展生成演算子をリウビリアンと呼ぶ。ここで取り扱うモデルでは、ハイゼンベルク方程式は線形方程式なので、シュレーディンガー方程式の時間発展生成演算子であるハミルトニアン固有値問題と同様に、リウビリアンの固有値問題を考えることができる [6, 7]。リウビリアンの固有値は固有モードの振動数である。また、リウビリアンの複素固有値は、グリーン関数  $G(z)$  の極での  $z$  の値と一致する。考えている系においては、リウビリアンが複素固有値をもつための要因 (非エルミート性) 2つが共存あるいは競合している。ひとつはパラメトリック不安定性であり、もうひとつは連続モードとの共鳴の結果として生じる散逸の効果である。

リウビリアンの複素固有値の虚部の  $\Delta_0 = \omega_0 - \Omega/2$  依存性を図 1 に示す。  $\Delta_0$  が連続モードの振動数のバンド端に達したところで、固有値は実数から複素数に変わる。このとき複素固有値は第 2 リーマン面にある。さらに  $\Delta_0$  が 0 に近づくと、パラメトリック分岐が起こる。パラメトリック分岐点は第 2 リーマン面の中にあるので、分岐点近傍では光子数の指数関数的増大は生じない。駆動外場との結合  $f_0$  が十分強ければ、  $\Delta_0 = 0$  の近傍で複素固有値は実軸を横切って第 1 リーマン面に達するが (図 1(a)),  $f_0$  が小さいとパラメトリック分岐が起きた後に複素固有値が実軸に達することはない (図 1(b))。

#### 5. 光子の生成と放射

本論文で取り扱ったモデルには、パラメトリック共鳴の条件 ( $\Omega = 2\omega_0$ ) がほぼ満たされた場合に、2つの定性的に異なる光子の生成と放射の仕方がある。

##### 5.1 光子数の指数関数的増大

図 1(a) のように第 1 リーマン面にリウビリアンの複素固有値 (グリーン関数の極) があるとき、全てのモードの光子数は時間の関数として指数関数的に増大する。このことは式 (22), (23), (25), (26) で与えられるラプラス逆変換の積分の積分路を下半面で閉じて積分路を変形し、第 1 リーマン面にあるグリーン関数  $G(z)$  の極からの寄与を分離すると、上半面の極での留数が指数関数的に増大する項を与えるこ

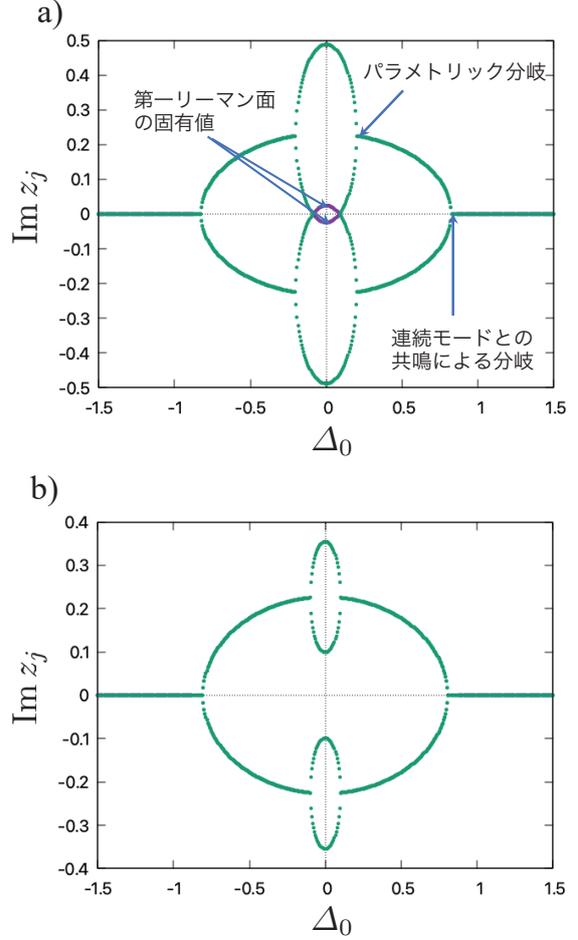


図 1 リウビリアンの複素固有値の虚部の離調 ( $\Delta_0 = \omega_0 - \Omega/2$ ) 依存性。(a)  $\Delta_B = 0$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。(b)  $f_0 = 0.1$ , 他は (a) と同じ。

とから理解できる。

連続モードの光子数の期待値 (24) の指数関数的に増大する成分のスペクトル  $F_{\text{exp}}(\Delta)$  を次のように定義する。

$$F_{\text{exp}}(\Delta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0 | \hat{b}_\Delta^\dagger(t) \hat{b}_\Delta(t) | 0 \rangle e^{-2\gamma t} \quad (28)$$

ここで、 $\gamma_I$  は  $G(z)$  の上半面の第 1 リーマン面にある極での  $z$  の虚部 (実部は 0) である。式 (24), (25), (26) より、

$$F_{\text{exp}}(\Delta) \propto \frac{g^2(\Delta)}{\Delta^2 + \gamma^2} \quad (29)$$

すなわち、ローレンチアンにパラメトリック振動子と連続モードの結合関数の 2 乗を掛けた関数に比例する。図 1(a) の  $\Delta_0 = 0$  の場合のスペクトル  $F_{\text{exp}}(\Delta)$  を図 2 に示す。

##### 5.2 定常光子放射

図 1(b) のように第 1 リーマン面にグリーン関数の極がない場合には、長時間領域では式 (23), (25),

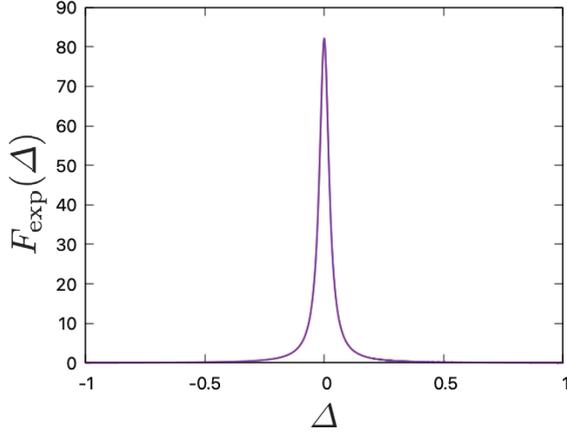


図2 式 (28) で定義される、光子数の指数関数的に増大する成分のスペクトル。  $\Delta_0 = 0$ ,  $\Delta_B = 0$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。

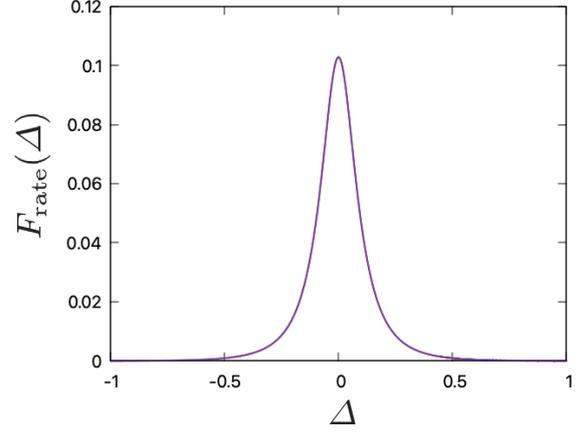


図3 連続モードの振動数の関数としての定常光子放射率。  $\Delta_0 = 0$ ,  $\Delta_B = 0$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.1$ 。

(26) の積分において、実軸上の  $z = \pm\Delta, -\Delta'$  にある  $G(z)$  の極からの寄与が残る。式 (22) の積分は、被積分関数が実軸上に極をもたないので、長時間極限で 0 に収束する。その結果、長時間極限で式 (21) の右辺第 1 項は 0 に、第 2 項は非ゼロの定数に収束し、パラメトリック振動子の光子数の期待値は、長時間領域で次式で与えられる一定値に保たれる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0 | \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) | 0 \rangle = f_0^2 \int d\Delta g^2(-\Delta) |G(\Delta + i0^+)|^2 \quad (30)$$

連続モードの光子数については、式 (24) の第 1 項は長時間極限で一定値に収束し、第 2 項は長時間領域では時間に比例する。従って、連続モードの光子数は長時間領域で時間について線形に増大し、次のように定常光子放射率  $F_{\text{rate}}(\Delta)$  を定義することができる。

$$F_{\text{rate}}(\Delta) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle 0 | \hat{b}_\Delta^\dagger(t) \hat{b}_\Delta(t) | 0 \rangle}{t} = 2\pi f_0^2 g^2(\Delta) g^2(-\Delta) |G(\Delta + i0^+)|^2 \quad (31)$$

このスペクトルの幅を決める因子は、主として第 2 リーマン面にあるグリーン関数の極での虚部 (実部は 0) の値である。図 1(b) の  $\Delta_0 = 0$  の場合のスペクトル  $F_{\text{rate}}(\Delta)$  を図 3 に示す。

式 (31) より振動数が  $\omega = \Delta + \Omega/2$  と  $\omega' = -\Delta + \Omega/2$  の光子対が放射されていることが分かる。このことは、 $\omega + \omega' = \Omega$  なので、パラメトリック下方変換 (parametric down-conversion) が起きていることを意味する。

## 6. まとめ

動的カシミール効果のモデルとして、パラメトリック振動子が外部連続場と結合した系の、ハイゼンベルク描像での時間発展を考えた。散逸の効果により全系の複素固有振動数のパラメトリック分岐は第 2 リーマン面で起こる。パラメトリック増幅の効果が散逸の効果を上回り、複素振動数が第 1 リーマン面にあるときには、全てのモードの光子数は指数関数的に増大する。パラメトリック増幅が散逸の効果により抑えられている状況では、パラメトリック振動子の光子数は一定に保たれ、外部に放射される光子数が時間に比例して増大する定常光子放射が起こる。このとき、駆動外場が掛かり続けている状況で光子が次々に生成されるので、継続的に光子の自発放出が起こっていると考えられる。

## 参考文献

- [1] G. T. Moore, J. Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [2] C. M. Wilson *et al.*, Nature **479**, 376 (2011).
- [3] P. Lähteenmäki, G. S. Paraoanu, J. Hassel, and P. J. Hakonen, PNAS **110**, 4234 (2013)
- [4] P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe, and F. Nori, Rev. Mod. Phys. **84**, 1 (2012).
- [5] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, 2nd Ed. (Springer, Berlin 2008).
- [6] S. Tanaka and K. Kanki, Physics **2**, 34 (2020).
- [7] S. Tanaka and K. Kanki, Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 12A107 (2020).