

# パラメトリック振動子からの光子放出の理論

武友輝、神吉一樹、田中智

大阪府立大学大学院理学系研究科物理科学専攻

## Theory of photon emission from parametric oscillator

Hikaru Taketomo, Kazuki Kanki, and Satoshi Tanaka

Department of Physical Science, Osaka Prefecture University

The dynamical Casimir effect is a phenomenon that causes the conversion of virtual photons to real photons by rapidly changing the boundary of the vacuum electromagnetic field. We have provided a unified explanation of photon creation and dissipation by solving the complex eigenvalue problem of the Liouvillian, which is the generator of the time evolution in the Heisenberg equation of the creation and annihilation operators of the photons. A parametric oscillators coupled to a photonic crystals exhibits three characteristic dynamics: 1) In the vicinity of the parametric resonance, the photon numbers increases exponentially. 2) Parametric amplification is suppressed by the effect of dissipation introduced by the coupling with the photonic crystal. In the long time region, the photon number of the parametric oscillator is constant and photons are emitted steadily to the photonic crystal. 3) There occurs neither parametric amplification nor dissipation. There is almost no dissipation of photons to the photonic crystal.

### 1. 背景

量子論によれば、真空電磁場は生成と消滅を絶えず間なく繰り返す仮想光子で満たされている。量子真空を観測する例として、ラムシフト、自発放出、静的カシミール効果などが挙げられるが、動的カシミール効果は真空揺らぎを直接観測できる現象であり、注目を集めている。動的カシミール効果は真空電磁場の境界を高速に変化させることで、仮想光子から実光子への転換を引き起こす現象である [1]。数多くの研究者が動的カシミール効果の実験を試みたが、境界を高い振動数で動かす必要があり、また放射される光子数が非常に小さいことの問題により観測困難であった。しかし 2011 年に Wilson らによって超伝導回路を用いて磁束密度を変化させることで動的カシミール効果の光子生成が初めて観測された [2]。本論文では動的カシミール効果を電磁場の量子揺らぎのパラメトリック増幅ととらえ、固有振動数がその約 2 倍の振動数の外場駆動により周期的な変調を受けるパラメトリック振動子を考える。そして、光子の生成から放射まで統一的に記述するために、環境外場と結合したパラメトリック振動子について考える。

### 2. モデル

次のハミルトニアンで表されるパラメトリック振動子が連続場と結合した系を考える [3, 4]。( $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = & \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + f_0 \cos \Omega t (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \\ & + \omega_B \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n - \frac{B}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{b}_n^\dagger \hat{b}_{n+1} + \hat{b}_{n+1}^\dagger \hat{b}_n) \\ & + g(\hat{a}^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger \hat{a}) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\hat{a}^\dagger$  ( $\hat{a}$ ) はパラメトリック振動子の生成 (消滅) 演算子、 $\hat{b}_n^\dagger$  ( $\hat{b}_n$ ) は  $n$  番目のサイトにおける生成 (消滅) 演算子であり、cavity モードがパラメトリック振動子である。次の交換関係を満たす。

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2)$$

$$[\hat{b}_n, \hat{b}_n^\dagger] = \delta_{n,n'} \quad (3)$$

$g$  は結合定数、 $\omega_B$  はフォトニック結晶の振動数である。外場輻射場として、一次元のタイト・バインディング模型を用いた。分散関係は以下である。

$$\omega_k = \omega_B - B \cos k \quad (0 < k < \pi) \quad (4)$$

また、 $g_k = g \sin k / \sqrt{\pi}$  である。ハミルトニアン第二項の仮想遷移項  $\hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger 2}$  により、粒子数が非保存であることに注意する。ここでは、ハイゼンベルク描像での系の時間発展を考え、生成・消滅演算子に対するハイゼンベルク方程式を解く。

### 3. ハイゼンベルク方程式とリウビリアン

生成・消滅演算子のハイゼンベルクの運動方程式は

$$\begin{aligned} i\dot{\hat{a}}(t) = & (\omega_0 + 2f_0 \cos \Omega t) \hat{a}(t) + 2f_0 \cos \Omega t \hat{a}^\dagger(t) \\ & + g\hat{b}_1^\dagger(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} i\dot{\hat{b}}_n(t) = & \omega_B \hat{b}_n(t) + \frac{B}{2} (\hat{b}_{n+1}(t) + \hat{b}_{n-1}(t)) \\ & + g\hat{a}(t) \delta_{n,1} \end{aligned} \quad (6)$$

およびこれらのエルミート共役である。

$$-i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{b}_n(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \\ \hat{b}_n^\dagger(t) \end{pmatrix} = \mathcal{L}(t) \begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{b}_n(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \\ \hat{b}_n^\dagger(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

また、式 (7) より、ハイゼンベルク演算子を列ベクトルとしてみたときに現れる行列をリウビリアン行列と定義する。リウビリアンの固有値は固有モードの振動数を与える。リウビリアン行列は以下の対称性を持つ。

$$\mathcal{L}^\dagger(t) = \eta \mathcal{L}(t) \eta \neq \mathcal{L}(t) \quad (8)$$

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} 0 & I_f \\ -I_f & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$I_f$  は、自由度の数を  $f$  として  $f$  次元の単位行列である。リウビリアン行列は二つの特徴を持っている。一つ目は周期駆動外場によって生じる時間周期性  $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t+T)$  である。時間依存性を取り除くためフロケ基底での展開を行う。パラメトリック共鳴近傍 ( $\Omega \simeq 2\omega_0$ ) で共鳴に寄与するモードを取り出し、時間に依存しないフロケ・リウビリアンを得る。二つ目は外場輻射場の結合によって無限次元行列になっていることである。射影演算子法を用いてフォトニックバンドとの相互作用を cavity モードに繰り込むことによってフロケ・リウビリアンを有限行列の有効リウビリアンで表すことができる。有効リウビリアンを行列表現で書くと次のようになる。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(z) = \begin{pmatrix} -\Delta_0 + \sigma(z + \Delta_B) & f_0 \\ -f_0 & \Delta_0 + \sigma(z - \Delta_B) \end{pmatrix} \quad (10)$$

ここで、共鳴からのずれを表すパラメーター（デチューニング）を

$$\Delta_0 = \omega_0 - \frac{\Omega}{2}, \quad \Delta_B = \omega_B - \frac{\Omega}{2} \quad (11)$$

と定義する。

対角成分の自己エネルギー  $\sigma(z)$  は

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \frac{B^2}{\pi} \int \frac{g^2 \sin^2 k}{z - \omega_k} dk \\ &= g^2 (z - \omega_B - \sqrt{(z - \omega_B)^2 - B^2}) \end{aligned} \quad (12)$$

で表される。有効リウビリアンは二つの要因によって非エルミートになる。一つ目は、パラメトリック共鳴により非対角成分に、非エルミート性が現れる。二つ目は共鳴特異性である。共鳴特異性による非エルミート性が自己エネルギーの形で現れる。有効フロケリウビリアンの固有値方程式は以下である。

$$\{z + \Delta_0 - \sigma(z + \Delta_B)\} \{z - \Delta_0 - \sigma(z - \Delta_B)\} + f_0^2 = 0 \quad (13)$$

有効フロケリウビリアンの複素固有値の実部と虚部の  $\Delta_0$  依存性を図 1 に示す。リウビリアンの複素固有値を反映として、フォトニック結晶と結合したパラメトリック振動子は三つのダイナミクスで特徴付けられる。 $|\Delta_0| > B$  のとき (図 4.b) 共鳴が

起こらず、指数関数的な増大、減衰は起こらない。 $f_0 < |\Delta_0| < B$  のとき (図 3.b)、cavity とバンドとの相互作用  $g_k$  によってフォトニック結晶への散逸 (指数減衰) が発生する。 $|\Delta_0| \lesssim f_0$  のとき (図 2.b)、バンドへの散逸に加え、 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  のカップリングによりパラメトリック共鳴が起こり、cavity 内の光子数が指数関数的に増大する。

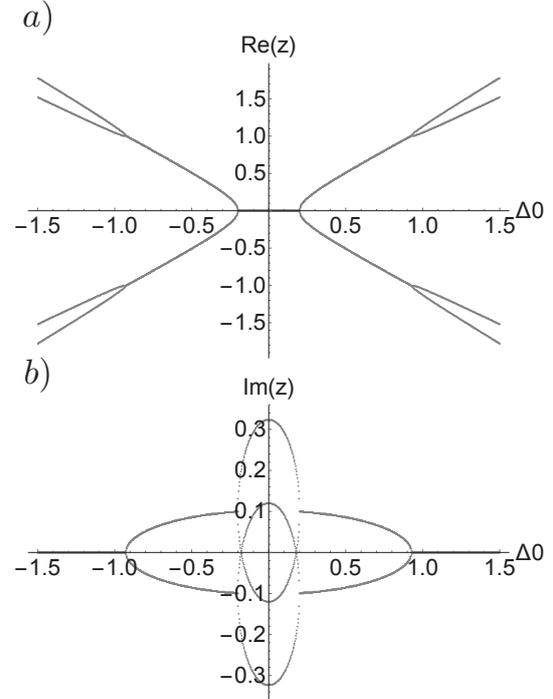


図 1 (a) 有効リウビリアンの複素固有値の実部。

(b) 有効リウビリアンの複素固有値の虚部

$$\Delta_B = 0, \quad B = 1, \quad g_0 = 0.3, \quad f_0 = 0.2$$

#### 4. 光子数の計算

前節の結果から、光子放射の時間的挙動は複素固有スペクトルの分岐点で分かれた各領域ごとに特徴的な振る舞いを示すと予想される。この節ではハイゼンベルグ方程式の解を用いて、各領域ごとの光子放射ダイナミクスの違いの特徴を明らかにする。この節の光子数の計算は初期状態を真空状態  $|0\rangle$  とした。

##### 4.1 光子数の指数関数的増大領域

$|\Delta_0| \lesssim f_0$  のとき、外場駆動によりパラメトリック共鳴が起こる (図 2.b)。このとき cavity 内の光子数の期待値 ( $\langle 0 | \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) | 0 \rangle$ ) は指数関数的に増大する (図 2.c)。指数的増大率はリウビリアンの複素固有値の第一リーマン面の虚部の 2 倍に一致する。 (図 2.d) の振る舞いを理解するために、キャパティ外部に放出された光子は一定速度  $v$  で運動すると考えてみる。また、ある時刻に外部に放出される光子数はその時刻での cavity モードの光子数に比例していると

考えられ、時間とともに  $e^{2\gamma t}$  に比例して指数関数的に増大すると考えられる。ある時刻  $t$  に  $n$  番目のサイトにある光子は、時刻  $t - na/v$  ( $a$  は格子定数) に放出されたので、その数は  $e^{2\gamma(t - na/v)}$  に比例する。従って、ある時刻において、光子数はサイトの番号  $n$  の関数として  $e^{-2\gamma na/v}$  に比例して指数関数的に減少する。

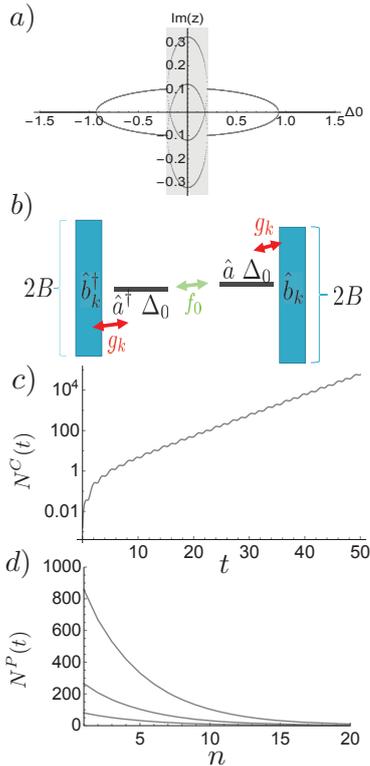


図2 パラメトリック共鳴領域 ( $|\Delta_0| \lesssim f_0$ )

(a) リウビリヤンの複素固有値の虚部の  $\Delta_0$  依存性。  $\Delta_B = 0$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。網掛け部分が  $|\Delta_0| \lesssim f_0$  に該当する。(b) 固有値の状態図。(c) cavity 光子数の期待値  $N^C(t) = \langle 0|\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)|0\rangle$ 。  $\Delta_0 = 0$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。(d) 各サイト  $n$  におけるフォトニック結晶の光子空間分布。下から  $t = 15, 30, 45$  の光子数をプロット

#### 4.2 定常放射領域

$f_0 < |\Delta_0| < B$  のとき、パラメトリック共鳴は起こらず cavity モードと連続モードの共鳴が起こる (図 3,b)。このとき、cavity 光子数の期待値は長時間領域で一定になる (図 3,c)。(図 3,d) は、生成された光子がフォトニック結晶へ伝搬している様子を表しており、cavity からフォトニック結晶へ光子が定常的に放出されていることがわかる。

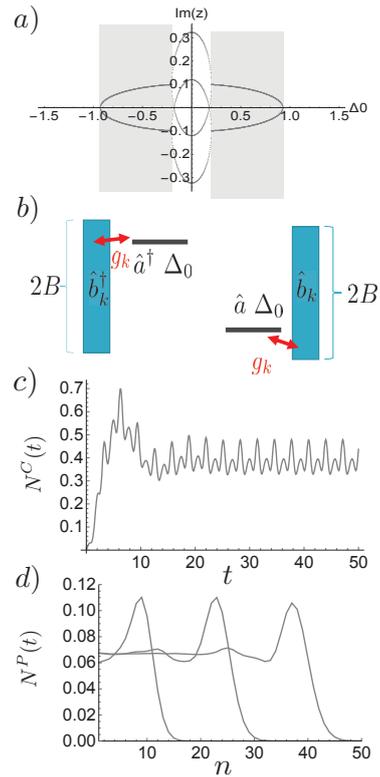


図3 定常放射領域 ( $f_0 < |\Delta_0| < B$ )

(a) リウビリヤンの複素固有値の虚部の  $\Delta_0$  依存性。  $\Delta_B = 0$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。網掛け部分が  $f_0 < |\Delta_0| < B$  に該当する。(b) 固有値の状態図。(c) cavity 光子数の期待値  $N^C(t) = \langle 0|\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)|0\rangle$ 。  $\Delta_0 = 0.3$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。(d) 各サイト  $n$  におけるフォトニック結晶の光子空間分布。左から  $t = 15, 30, 45$  の光子数をプロット

#### 4.3 デチューニング領域

$B < |\Delta_0|$  のとき (図 4,b)、デチューニングが大きく、cavity 内でほとんど光子が生成されず、外部輻射場への光子の散逸はほとんど見られない (図 4.c)。

#### 4.4 非平衡定常モード

図 1 より、 $|\Delta_0| = 0.1785$  のとき、パラメトリック共鳴と連続状態の共鳴による定常的なモードがあることが分かる。このときの cavity 光子数を (図 5,a) に示す。このとき光子数 (赤色) は時間に比例して増加していることがわかる。(図 5.b) より、cavity 内で生成された光子が時間に比例してフォトニック結晶に伝搬している。(図 5.a) の青色は振動子の固有振動数  $\omega_0$  が振動数  $\Omega \simeq 2\omega_0$  の変調を受ける場合に、速く振動する項を落とす近似 (回転波近似) を施した

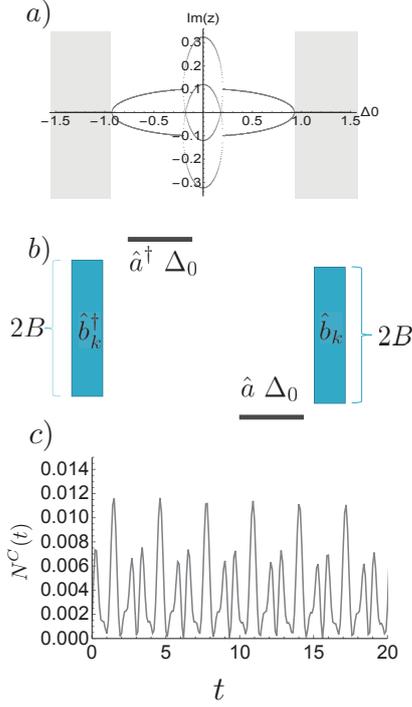


図4 デチューニング領域 ( $B < |\Delta_0|$ )  
(a) リウビリ안의複素固有値の虚部の  $\Delta_0$  依存性。  $\Delta_B = 0$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。網掛け部分が  $B < |\Delta_0|$  に該当する。(b) 固有値の状態図。(c) cavity 光子数の期待値  $N^C(t) = \langle 0 | \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) | 0 \rangle$ 。  $\Delta_0 = 3$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。

場合の光子数の期待値である。つまり、

$$\begin{aligned} \hat{H}_2(t) = & \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{f_0}{2} (e^{i\Omega t} \hat{a}^2 + e^{-i\Omega t} \hat{a}^{\dagger 2}) \\ & + \omega_B \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n - \frac{B}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{b}_n^\dagger \hat{b}_{n+1} + \hat{b}_{n+1}^\dagger \hat{b}_n) \\ & + g(\hat{a}^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger \hat{a}) \end{aligned} \quad (14)$$

回転波近似との比較により光子数の振動 (図 5.a, 赤色) は counter-rotating term による振動であることが分かる。

## 5. まとめ

動的カシミール効果のモデルとして、パラメトリック振動子が外部連続場と結合した系について考えた。リウビリ안의複素固有値問題を解くことによって光子対生成と光子対の散逸現象を同時に取り込み統一的な説明を行った。エルミートなハミルトニアンによる生成・消滅演算子の時間発展を考えることにより、時間発展を生成するリウビリアンにパラメトリック増幅による非エルミート性が、また射影演算

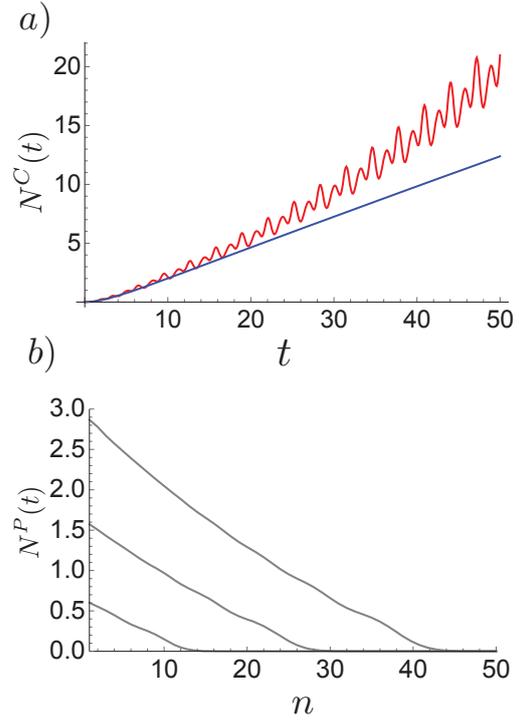


図5 非平衡定常モード ( $\Delta_0 = 0.1785$ )  
(a) 赤色：本論文 ((1)) による cavity 光子数の期待値。青色：回転波近似 ((14)) による cavity 光子数の期待値。(b) 非平衡定常モードにおけるフォトリック結晶の光子数の期待値。下から  $t=10, 30, 50$  の光子数をプロット。  $\Delta_0 = 0.1785$ ,  $B = 1$ ,  $g_0 = 0.3$ ,  $f_0 = 0.2$ 。

子法によって連続モードを繰り込んだことで共鳴特異性による非エルミート性が自己エネルギーの形で現れる。パラメトリック振動子のパラメトリック共鳴からのデチューニングについて三つの領域に分け、それぞれの領域で特徴的なダイナミクスが現れることを示した。一つ目の領域は、パラメトリック共鳴近傍で光子数は指数関数的に増大する。二つ目の領域では、cavity モードと連続モードの共鳴に由来する散逸の効果によりパラメトリック共鳴が抑えられ、cavity 光子数は長時間領域で一定になる。三つ目の領域は、パラメトリック共鳴外で連続状態との共鳴が起こらない領域である。この領域では外部輻射場への光子の散逸はほとんど見られない。

## 参考文献

- [1] G. T. Moore, J. Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [2] C. M. Wilson *et al.*, Nature **479**, 376 (2011).
- [3] S. Tanaka and K. Kanki, Physics **2**, 34 (2020).
- [4] S. Tanaka and K. Kanki, Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 12A107 (2020).